KATA PENGANTAR

Sebagaian besar mahasiswa menganggap bahwa Mata Kuliah yang berhubungan dengan menghitung yang salah satunya *Aljabar Linear* adalah susah, rumit dan memusingkan. Alhasil jalan keluar yang ditempuh untuk mengatasinya adalah mahasiswa menghafal teknik (urutan cara) menjawab soal, bukan memahami inti persoalan, materi, dan bagaimana mendapatkan ide menyelesaikan soal.

Sebagian lagi menganggap pemahaman materi saja sudah cukup. Pengalaman saya, mahasiswa yang baru memahami sebuah materi secara intuitif tetap saja akan kesulitan ketika menjawab persoalan. Kesulitan bukan karena tidak tahu jawabannya, tetapi kurang pandai bagaimana cara mengungkapkannya. Kemampuan seseorang menuangkan apa yang difahaminya ke dalam tulisan yang sistematis dan bisa dimengerti orang lain juga penting, karena orang khususnya dosen ketika UAS tertulis menilai apa yang kita tulis pada lembar jawaban bukan apa yang ada di dalam otak kita.

"*1001 soal dan solusi* " ini dibuat *bukan* dengan tujuan agar mahasiswa pembaca menghafal teknik menjawabnya, melainkan supaya pembaca dapat lebih memahami materi, dan berlatih mengungkapkan apa yang difahami. Tentunnya tulisan ini tidaklah cukup bagi pembaca, *text book* dan penjelasan dari dosen tetaplah lebih utama, jadikan soal-soal yang ada disini sebagai latihan, sekedar untuk melihat kebenaran jawaban anda atau ketika anda merasa sudah mengalami kebuntuan, baru silahkan pembaca menyimak pembahasannya.

Semoga bermanfaat !

Arip Paryadi

DAFTAR ISI

SOAL SOAL

UJIAN TENGAH SEMESTER GENAP 2008/2009

Aljabar Linear / MA1223

Senin 20-04-2009

Tutup Buku

1. Diketahui SPL

   $x+2y-3z=0$

   $3x-y+5z=0$

   $4x+y+\left(k^2-14\right)z=0$

   Memiliki solusi tak hingga banyak

   a. Tentukan nilai k

   b. Tentukan solusinya

2. Diketahui matriks A_{4x4} dengan $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

   a. Hitung det(A)

   b. Tentukan solusi X (jika ada) dari $AX = B$ dengan $B=\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$

3. Misalkan A = (1,1,2), B = (-1,0,3), C = (2,-3,4), maka:

   a. Hitung luas segitiga ABC

   b. Tentukan proyeksi orthogonal $\overrightarrow{AB}$ terhadap $\overrightarrow{AC}$

4. Diketahui W adalah himpunan (a,b,c) $\in R^3$ dengan $a^2 = b^2 + c^2$. Periksa apakah W subruang dari R^3

5. Periksa apakah polinom-polinom berikut :

   $p_1(x)=1+x,\quad p_2(x)=1-x+x^2,\quad p_3(x)=2+x^2$, dan $\quad p_4(x)=3+x+x^2$

   Membangun P_2 ? Berikan penjelasannya !

No	1	2	3	4	5
Nilai	8	8	8	8	8

UJIAN TENGAH SEMESTER GENAP 2007/2008

MA 1223 ALJABAR LINEAR

Rabu / 9 April 2008

Tutup Buku

Kerjakan dengan singkat dan benar !

Berdoalah sebelum mengerjakan!

1. Periksa apakah $S = \{(1,2,3),(2,3,4),(0,0,0)\}$ saling bebas linear !

2. Diketahui $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ hitung det(2A) !

3. Diketahui sistem persamaan linear
   $2x + y = z - 1$
   $x - y - 2 = 0$
   $y + z = 1$
   Tentukan solusi dari SPL tersebut !

4. Diketahui $W = \{a + bx + cx^2 \mid a = b + c, \text{ dengan } b, c \in R\}$
   a. Periksa apakah W adalah subruang polinom orde dua P_2
   b. Bila ya, tentukan basis dan dimensi dari W !

5. Tentukan basis dan dimensi ruang solusi dari SPL homogen
   $x + y + z + w = 0$
   $-x + 2y - w = 0$

6. Hitung luas segitiga yang titik-titik sudutnya P (1,2,3) , Q (4,3,1), dan R (2,1,2)

-o0o- Semoga Sukses –o0o-

UJIAN TENGAH SEMESTER GENAP 2006/2007

Aljabar Linear / MA1223

Tutup Buku

1. Tentukan basis dan dimensi subruang

$$W = \left\{ \left. \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right| \; a - 2c = 0 \right\}$$

2. Diketahui $S = \left\{ 2 + x + x^2 ,\ 1 - 2x + x^2 ,\ 1 + x - 2x^2 \right\}$
   a. Periksa apakah S bebas linear
   b. Periksa apakah S membangun P_2
   c. Periksa apakah S basis P_2

3. Tentukan $\vec{y}$ jika diketahui $\vec{u} = (-1,3,2))$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ dan $\vec{u} \times \vec{y} = (1,1,-1)$.

4. Diketahui $\vec{u} = (k, k-1, 1)$, $\vec{v} = (-k-1, 2k, 4)$, tentukan semua nilai k supaya $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ membentuk sudut lancip

5. Tentukan basis dan dimensi ruang solusi (ruang null) dari SPL homogennya berikut

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 \qquad\quad - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Soal	1	2	3	4	5
Nilai	8	8	8	8	8

JDN, ADW, ERW, SSI, WDT, NRD, SMN, DMA , RZK

Selamat mengerjakan, semoga sukses !

UJIAN TENGAH SEMESTER GENAP 2005/2006

MA1223 Aljabar Linear

KAMIS 6 April 2006

Tutup Buku

1. Diketahui SPL dalam bentuk matriks $A\vec{X} = \vec{B}$, dengan $A = \begin{bmatrix} k & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ k & 2k & 3 \end{bmatrix}$

   $\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Jika $Det(A) = -1$ tentukan nilai x_3

2. Diketahui $\vec{a} = (1, k, 1)$ dan $\vec{b} = (2, 2, -1)$, tentukan nilai k agar $\left\| proy_{\vec{b}}\vec{a} \right\| = 4$

3. Diketahui $W = \{(x, y, z) \mid x - z = 0\}$, periksa apakah W subruang R_3

4. Diketahui $S = \{1 - x + x^2, 1 + x + x^2\}$

   a. Periksa apakah S membangun P_2 (polinom orde-2)
   b. Periksa apakah S bebas linear
   c. Apakah S basis P_2 (jelaskan jawaban anda)

Nomor	1	2	3	4
Nilai	10	10	10	10

UJIAN TENGAH SEMESTER GENAP 2004/2005
MA1223 – Aljabar Linear
KAMIS, 14 April 2005
Tutup Buku

Kerjakan soal berikut dengan **jujur** dan **benar** !

1. Diketahui $A = (1,2,3)$, $B = (-1,2,-3)$, dan $C = (3,2,1)$ merupakan titik pada ruang XYZ .
   a. Tentukan proyeksi vektor $\overrightarrow{AC}$ terhadap vektor $\overrightarrow{AB}$!
   b. Tentukan luas segitiga ABC

2. Diketahui $\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = t$, untuk suatu $a,b,c,d,e,f,g,h,i,t \in Rill.$

   Dengan menggunakan sifat, tentukan

$$\det\left(3\begin{bmatrix} 2a & 2b & 2c \\ d-a & e-b & f-c \\ g+2a & h+2b & i+2c \end{bmatrix}\right)$$

3. Misalkan $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$. Tentukan vektor tak nol $\bar{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sehingga $B\bar{u} = 6\bar{u}$!

4. Tentukan basis subruang $S = \left\{ ax^2 + bx + c \mid a + 2b = 3c \right\}$. Buktikan !

-----------*o0 Good Luck 0o*-----------

UJIAN TENGAH SEMESTER GANJIL 2003/2004

MA-2313 Aljabar Linear

Selasa 7 Oktober 2003

Tutup Buku

1. Misalkan sistem persamaan linear $AX = B$, dimana $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   Tentukan :
   a. Determinan A
   b. A^{-1}(matrtiks invers A, bila ada) !
   c. Basis ruang solusi, jika $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. Diketahui sistem persamaan linear $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & \alpha & 6 \\ 1 & 0 & 2 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 11 \\ \alpha \end{pmatrix}$
   a. Tentukan nilai α dan β agar SPL memiliki solusi yang banyak
   b. Tentukan solusi SPL diatas dari jawaban a (satu saja) !

3. Diketahui A = (1,-1,2), B = (2,1,-1), dan C = (1,0,-3) merupakan titik-titik di $\Re^3$. Tentukan :
   a. Luas segitiga ABC !
   b. Proyeksi orthogonal ruas garis AB terhadap ruas garis yang tegak lurus terhadap ruas garis AC dan BC !

4. a. Misalkan A adalah himpunan polinom orde 3 yang berbentuk $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ dimana $a_0 - 2a_2 + a_3 = 0$. Periksa apakah A merupakan subruang dari ruang vektor polinom orde 3 ! jika ya tentukan basis dan dimensinya !

b. Diketahui $W = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$. . Periksa, apakah W merupakan basis bagi ruang vektor matriks 2×2 !

------------------o0 YLS-ADW-ERW-DMA 0o------------------

good Luck ! ..

PEMBAHASAN

PEMBAHASAN

Ujian Tengah Semester Genap 2008/2009
Mata Kuliah : Aljabar Linear / MA1223
Senin 20-04-2009

1. Diketahui SPL memiliki solusi tak hingga banyak
   a. Menentukan nilai *k*
   Jika SPL dituliskan sebagai perkalian matriks akan menjadi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & k^2-14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Matriks yang diperluas untuk sistem ini adalah

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 3 & -1 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & k^2-14 & 0 \end{pmatrix}$$

   yang dapat direduksi sebagai berikut

$$\begin{array}{l} \\ -3b_1+b_2 \sim \\ -4b_1+b_3 \sim \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -7 & 14 & 0 \\ 0 & -7 & k^2-2 & 0 \end{pmatrix}$$

   Dari matriks ini terlihat bahwa sistem akan memiliki penyelesaian tak hingga banyak jika dan hanya jika $k^2-2=14$ yaitu $k=\pm 4$.

   b. Menentukan solusinya
   Jika $k=\pm 4$ kita substitusikan pada operasi terakhir pada poin sebelumnya maka akan diperoleh

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -7 & 14 & 0 \\ 0 & -7 & 14 & 0 \end{pmatrix} \quad -\tfrac{1}{7}b_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -7 & 14 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{r} -2b_2+b_1 \sim \\ 7b_2+b_3 \sim \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   dari matriks ini kita peroleh $x+z=0$ dan $y-2z=0$. Karena nilai z dapat ditetapkan dengan sembarang nilai *t*, maka kita memperoleh sebuah penyelesaian yaitu $x=-t,\ y=2t,\ z=t\ ;t\in\Re$.

2. Diketahui matriks A_{4x4} dengan $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

   a. Menghitung det(A)

$$Det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

Diperoleh dengan mengalikan baris kedua dengan -1 kemudian menambahkannya pada baris ketiga

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

Diperoleh dengan mengalikan baris pertama dengan -1 kemudian menambahkannya pada baris ketiga

Jika kita lakukan ekspansi kofaktor sepanjang baris ketiga, maka akan menghasilkan $Det(A) = 0$.

   b. Menentukan solusi X (jika ada) dari $AX = B$ dengan $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$

Sistem ini jika dituliskan dengan lengkap adalah

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Matriks yang diperluas untuk sistem ini adalah

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

dengan menerapkan OBE yang sama dengan OBE pada poin sebelumnya (poin a) sistem ini akan tereduksi menjadi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Kemudian kita lanjutkan sehingga didapat bentuk eselon baris tereduksi sebagai berikut

$$\begin{array}{c} \\ -b_1 + b_2 \sim \\ b_3 \leftrightarrow b_4 \sim \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ -b_2 + b_1 \sim \\ -b_2 + b_3 \sim \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad b_1 \leftrightarrow b_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dari matriks terakhir kita peroleh $x_1 + 3x_3 - x_4 = -2$ dan $x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 5$. karena nilai x_3 bisa kita tetapkan sebagai sembarang nilai s, dan x_4 sebagai sembarang nilai t, maka kita mendapatkan penyelesaian yaitu

$x_1 = -2 - 3s + t$, $x_2 = 5 + 4s - 3t$, $x_3 = s$ dan $x_4 = t$; $s, t \in \Re$

3. Misalkan A = (1,1,2), B = (-1,0,3), C = (2,-3,4)
   a. Menghitung luas segitiga *ABC*

      $\overrightarrow{AB} = B - A = (-1,0,3) - (1,1,2) = (-2,-1,1)$

      $\overrightarrow{AC} = C - A = (2,-3,4) - (1,1,2) = (1,-4,2)$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ -2 & -1 & 1\\ 1 & -4 & 2\end{vmatrix}=\hat{i}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -4 & 2\end{vmatrix}-\hat{j}\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}+\hat{k}\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 1 & -4\end{vmatrix}=2\hat{i}+5\hat{j}+9\hat{k}$$

$$Luas\ \ \Delta ABC=\tfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\|=\tfrac{1}{2}\left\|2\hat{i}+5\hat{j}+9\hat{k}\right\|=\tfrac{1}{2}\sqrt{4+25+81}=\tfrac{1}{2}\sqrt{110}$$

b. Menentukan proyeksi orthogonal $\overrightarrow{AB}$ terhadap $\overrightarrow{AC}$

$$\mathrm{Pr}\,oy_{\overrightarrow{AC}}\,\overrightarrow{AB}=\frac{\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{\|AC\|^2}}\overrightarrow{AC}=\frac{-2+4+2}{1+16+4}(1,-4,2)=\frac{4}{21}(1,-4,2)$$

4. Memeriksa apakah W subruang dari R^3 jika $W=\{(a,b,c)\,|\,a^2=b^2+c^2\}$.

   Akan kita periksa apakah W memenuhi sifat sifat dari subruang. Misalkan ada dan ambil sembarang anggota dari W yaitu $w_1, w_2\in W$ dengan $w_1=(a_1,b_1,c_1)$ dan $w_2=(a_2,b_2,c_2)$. Tujuan kita adalah memeriksa apakah $w_1+w_2\in W$.

   Karena $w_1, w_2\in W$ maka secara berturut turut haruslah berlaku $a_1{}^2=b_1{}^2+c_1{}^2$ * dan $a_2{}^2=b_2{}^2+c_2{}^2$ * .

   Kemudian

   $w_1+w_2=(a_1,b_1,b_2)+(a_2,b_2,c_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2,c_1+c_2)$.

   Sekarang perhatikan bahwa

   $(a_1+a_2)^2=a_1{}^2+a_2{}^2+2a_1a_2$ berdasarkan * dan ** akan menghasilkan

   $$\begin{aligned}&=\left(b_1{}^2+c_1{}^2\right)+\left(b_2{}^2+c_2{}^2\right)+2a_1a_2\\&=\left(b_1{}^2+b_2{}^2\right)+\left(c_1{}^2+c_2{}^2\right)+2a_1a_2\\&\neq(b_1+b_2)^2+(c_1+c_2)^2\end{aligned}$$

   Ini menunjukkan bahwa $w_1+w_2\notin W$ yaitu W tidak tertutup terhadap perkalian. Jadi W bukanlah subruang dari R^3. (tidak perlu kita periksa sifat sifat yang lainnya dari subruang)

5. Memeriksa apakah polinom-polinom berikut Membangun $\mathbf{P}_2$.
   $p_1(x)=1+x,\quad p_2(x)=1-x+x^2,\quad p_3(x)=2+x^2$, dan $p_4(x)=3+x+x^2$

Untuk melihatnya harus kita periksa apakah **sembarang** polinom $p = a + bx + cx^2$ pada $\mathbf{P}_2$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear $p = k_1 p_1 + k_2 p_2 + k_3 p_3 + k_4 p_4 (5.1)$.

Jika kita tuliskan (5.1) dengan lengkap akan menjadi

$$a + bx + cx^2 = k_1(1 + x) + k_2(1 - x + x^2) + k_3(2 + x^2) + k_4(3 + x + x^2)$$
$$= (k_1 + k_2 + 2k_3 + 3k_4) + (k_1 - k_2 + k_4)x + (k_2 + k_3 + k_4)x^2$$

Dengan membandingkan koefisien suku yang sejenis pada kedua ruas diperoleh

$$k_1 + k_2 + 2k_3 + 3k_4 = a$$
$$k_1 - k_2 + k_4 = b$$
$$k_2 + k_3 + k_4 = c$$

Dalam bentuk perkalian matriks sistem ini menjadi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Matriks yang diperluas untuk sistem ini adalah

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & a \\ 1 & -1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & 1 & c \end{array}\right)$$

yang dapat direduksi sebagai berikut

$$-b_1 + b_2 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & -2 & -2 & -2 & b - a \\ 0 & 1 & 1 & 1 & c \end{array}\right) \qquad -\tfrac{1}{2}b_2 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \tfrac{1}{2}(a - b) \\ 0 & 1 & 1 & 1 & c \end{array}\right)$$

Perhatikan bahwa sistem ini akan konsisten (memiliki penyelesaian) jika dan hanya jika $c = \frac{1}{2}(a - b)$ yang bertentangan dengan pernyataan sembarang polinom $p = a + bx + cx^2$. Jika $c \neq \frac{1}{2}(a - b)$ maka sistem ini tidak memiliki penyelesaian yang berarti ada polinom $p \in P_2$ yang ***tidak*** dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear $p = k_1 p_1 + k_2 p_2 + k_3 p_3 + k_4 p_4$ yaitu p_1, p_2, p_3 dan p_4 tidak membangun $\boldsymbol{P}_2$.

PEMBAHASAN

Ujian Tengah Semester Genap 2007/2008

MA 1223 ALJABAR LINEAR

Rabu / 9 April 2008

1. Untuk melihat apakah $S = \{v_1 = (1,2,3), v_2 = (2,3,4), v_3 = (0,0,0)\}$ saling bebas linear harus diperiksa apakah $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ merupakan satu satunya solusi dari $k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 = \overline{0}$.

   Jika kita tuliskan persamaan ini dalam komponen komponennya maka akan menjadi $k_1(1,2,3) + k_2(2,3,4) + k_3(0,0,0) = (0,0,0)$.
   Dengan mudah dibuktikan bahwa $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ merupakan solusi dari persamaan ini. Tetapi itu ***bukan satu satunya solusi***, karena $k_1 = k_2 = 0,\ k_3 = t$, $t \in \Re$ juga merupakan solusi. Sehingga menurut definisinya S bergantung linear (tak bebas linear).

   Alternatif

   Karena kita dapat menuliskan v_3 sebagai kombinasi linear dari vektor vektor lainnya pada S yaitu $v_3 = 0v_1 + 0v_2$ maka S saling bergantung linear.

2. Menghitung det(2A) jika diketahui $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$!

   Dengan melakukan ekspansi kofaktor sepanjang baris ketiga kita memiliki

$$\det(A) = (-1)^5 .2. \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2\left(\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \right) = -2(-5+33) = -56$$

   Sehingga $Det(2A)$ adalah $2^4(-56) = -896$

3. Menentukan solusi SPL

$$2x + y - z = -1$$
$$x - y = 2$$
$$y + z = 1$$

Jika kita tuliskan dalam bentuk perkalian matriks akan menjadi $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Matriks yang diperluas untuk sistem ini adalah

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

yang dapat direduksi menjadi bentuk eselon baris tereduksi sebagai berikut

$$-b_2 + b_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad -b_1 + b_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} -2b_3 + b_1 \sim \\ 3b_3 + b_2 \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} -\frac{1}{4}b_2 + b_3 \sim \\ \frac{3}{4}b_2 + b_1 \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\tfrac{1}{4}b_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad b_2 \leftrightarrow b_3 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dari matriks yang terakhir kita telah memperoleh sebuah penyelesaian SPL yaitu $x = 1, y = -1$ dan $z = 2$.

4. Diketahui $W = \left\{ a + bx + cx^2 \,\middle|\, a = b + c, \text{ dengan } b, c \in R \right\}$

   c. Memeriksa apakah W adalah subruang polinom orde dua P_2 .

      Akan kita periksa apakah W memenuhi sifat sifat sebagai subruang.

      - Karena $2 + x + x^2$ adalah anggota dari *W*, maka *W* memenuhi sifat subruang pertama yaitu $W \neq \{\ \}$.

- Jelas bahwa $W \subset P_2$
- Misalkan ada sembarang polinom anggota W yaitu $w_1, w_2 \in W$ dengan $w_1 = a_1 + b_1x + c_1x^2$ dan $w_2 = a_2 + b_2x + c_2x^2$. Tujuan kita adalah ingin memeriksa apakah $w_1 + w_2 \in W$.

  Karena $w_1, w_2 \in W$ maka secara berturut turut haruslah berlaku $a_1 = b_1 + c_1 *$ dan $a_2 = b_2 + c_2 **$. Kemudian

  $$w_1 + w_2 = \left(a_1 + b_1x + c_1x^2\right) + \left(a_2 + b_2x + c_2x^2\right)$$
  $$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)x^2$$

  Sekarang perhatikan bahwa berdasarkan * dan ** $a_1 + a_2 = (b_1 + c_1) + (b_2 + c_2) = (b_1 + b_2) + (c_1 + c_2)$ yang menunjukkan bahwa $w_1 + w_2 \in W$. jadi W memenuhi sifat selanjutnya dari subruang.
- Selanjutnya untuk sembarang nilai $k \in R$ dan $w_1 \in W$ berlaku $kw_1 = k\left(a_1 + b_1x + c_1x^2\right) = ka_1 + kb_1x + kc_1x^2$ dan akan kita periksa apakah $kw_1 \in W$

  Karena $ka_1 = k(b_1 + c_1) = kb_1 + kc_1$ ini menunjukkan bahwa $kw_1 \in W$ yang melengkapi pemeriksaan kita bahwa *W* subruang dari P_2.

d. Menentukan basis dan dimensi dari *W*.

persamaan $a = b + c$ memiliki jumlah penyelesaian yang tak trivial. Karena hanya ada sebuah persamaan yang melibatkan tiga buah bilangan yang tidak diketahui, maka ada dua variabel bebas. Misalkan $b = s$ dan $c = t$ maka $a = s + t$. sehingga kita dapat menuliskan *W* sebagai

$$W = \left\{(s + t) + sx + tx^2 = (1 + x)s + \left(1 + x^2\right)t\right\}$$

yang menunjukkan bahwa polinom polinom $p_1 = 1 + x$ dan $p_2 = 1 + x^2$ merentang *W*. Karena p_1 dan p_2 keduanya tidak saling berkelipatan satu sama lain, maka p_1 dan p_2 saling bebas linear. Jadi $\{p_1, p_2\}$ adalah basis bagi *W* yang berdimensi 2.

5. Menentukan basis dan dimensi ruang solusi dari SPL homogen
$x+y+z+w=0$
$-x+2y-w=0$
Kita dapat menyatakan sistem ini dalam bentuk perkalian matriks sebagai

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Matriks yang diperluas untuk sistem ini adalah

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Yang dapat direduksi menjadi eselon baris tereduksi sebagai berikut

$$b_1+b_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tfrac{1}{3}b_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \tfrac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \quad -b_2+b_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \tfrac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \tfrac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Dari matriks yang terakhir kita memiliki $w=-x-\frac{2}{3}z$ dan $y=-\frac{1}{3}z$. karena nilai x dapat ditetapkan dengan sembarang nilai s dan nilai z dapat ditetapkan dengan sembarang nilai t, maka terdapat tak terhingga banyaknya pemecahan yang membentuk ruang solusi SPL yaitu

$$\left\{\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -s-\frac{2}{3}t \\ s \\ -\frac{1}{3}t \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}s+\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

yang menunjukkan bahwa vektor vektor $v_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ merentang ruang solusi tersebut. Karena v_1 dan v_2 tidak saling berkelipatan satu sama lain maka kedua vektor ini saling bebas bebas linear. Jadi $\{v_1, v_2\}$ adalah basis bagi ruang solusi SPL yang dimaksud yang berdimensi 2.

6. Menghitung luas segitiga yang titik-titik sudutnya P (1,2,3) , Q (4,3,1), dan R (2,1,2)

   $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (4,3,1) - (1,2,3) = (3,1,-2)$

   $\overrightarrow{PR} = R - P = (2,1,2) - (1,2,3) = (1,-1,-1)$

   $$\overline{PQ} \times \overline{PR} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$$

   Luas $\Delta PQR = \frac{1}{2}\left\|\overline{PQ} \times \overline{PR}\right\| = \frac{1}{2}\left\|-3\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{26}$

PEMBAHASAN

Ujian Tengah Semester Genap 2006/2007

Aljabar Linear / MA1223

1. Menentukan basis dan dimensi subruang $W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \middle| \ a - 2c = 0 \right\}$

   Kondisi $a - 2c = 0$ menunjukkan bahwa b merupakan variabel bebas, misalkan $b = s$. Karena tersisa sebuah persamaan dan dua bilangan yang belum diketahui (a,c) , maka kita memiliki sebuah variabel bebas lagi, misalkan $c = t$ sehingga diperoleh $a = 2t$. Dengan demikian kita dapat menuliskan W sebagai

   $$W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t \right\}$$

   yang menunjukkan bahwa vektor vektor $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dan $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ merentang W. Karena u dan v tidak saling berkelipatan satu sama lain, maka kedua vektor ini saling bebas linear . Akhirnya kita simpulkan bahwa $\{u, v\}$ adalah basis bagi W yang berdimensi 2.

2. Diketahui $S = \left\{ 2 + x + x^2 ,\ 1 - 2x + x^2 ,\ 1 + x - 2x^2 \right\}$

   a. Memeriksa apakah S bebas linear.

      Untuk memeriksanya harus kita periksa apakah jika diberikan $k_1, k_2,$ dan k_3 maka $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ merupakan satu satunya solusi dari $k_1\left(2 + x + x^2\right) + k_2\left(1 - 2x + x^2\right) + k_3\left(1 + x - 2x^2\right) = 0$ . ....(*)

      Dengan mengumpulkan suku suku yang sejenis pada (*) akan diperoleh $(2k_1 + k_2 + k_3) + (k_1 - 2k_2 + k_3)x + (k_1 + k_2 - 2k_3)x^2 = 0$.

      Karena persamaan ini harus dipenuhi untuk setiap nilai *x,* maka haruslah berlaku $2k_1 + k_2 + k_3 = k_1 - 2k_2 + k_3 = k_1 + k_2 - 2k_3 = 0$ atau dalam bentuk perkalian matriks menjadi

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad .....(**)$$

Sekarang perhatikan bahwa

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6+3+3 = 12 \neq 0$$

yang menunjukkan bahwa matriks koefisien pada ** dapat dibalik (memiliki invers) yang berakibat ** hanya memiliki sebuah solusi penyelesaian yaitu

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

yang berarti S bebas linear.

b. Memeriksa apakah S membangun P_2.

Akan kita periksa apakah sembarang polinom pada P_2 yaitu $a = a_0 + a_1x + a_2x^2$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear $a_0 + a_1x + a_2x^2 = k_1(2 + x + x^2) + k_2(1 - 2x + x^2) + k_3(1 + x - 2x^2)$. Atau dengan kata lain akan kita periksa apakah ada $k_1, k_2,$ dan k_3 sehingga $a_0 + a_1x + a_2x^2 = k_1(2 + x + x^2) + k_2(1 - 2x + x^2) + k_3(1 + x - 2x^2)$.

Dengan mengumpulkan suku suku yang sejenis pada kedua ruas akan diperoleh

$a_0 + a_1x + a_2x^2 = (2k_1 + k_2 + k_3) + (k_1 - 2k_2 + k_3)x + (k_1 + k_2 - 2k_3)x^2$.

Dengan membandingkan koefisien suku yang sama pada kedua ruas diperoleh $k_1 + k_2 + k_3 = a_0$, $k_1 - 2k_2 + k_3 = a_1$, dan $k_1 + k_2 - 2k_3 = a_2$ atau dalam bentuk perkalian matriks menjadi

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} ....(***)$$

Terlihat bahwa matriks koefisien pada ** dan *** adalah sama dan pada poin sebelumnya telah ditunjukkan bahwa matriks koefisien pada *** dapat dibalik yang berakibat *** selalu memiliki penyelesaian untuk sembarang a_0, a_1 dan a_2 yaitu S membangun P_2.

Note :

Untuk membuktikan bahwa S bebas linear kita cukup menunjukkan keberadaan k_1, k_2, dan k_3 (ada atau tidak ada) tanpa perlu mencari nilai tepat dari k_1, k_2, dan k_3 yang sebenarnya. Tetapi jika pembaca ingin mendapatkannya, maka untuk kasus di atas penyelesaian untuk k_1, k_2, dan k_3 adalah

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

c. Memeriksa apakah S basis P_2 .

Karena S merentang P_2 dan S bebas linear , maka S basis bagi P_2.

3. Menentukan $\vec{y}$ jika diketahui $\vec{u} = (-1,3,2))$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ dan $\vec{u} \times \vec{y} = (1,1,-1) = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$

$$\vec{u} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 3 & 2 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

$$= (3y_3 - 2y_2)\vec{i} + (y_3 + 2y_1)\vec{j} - (y_2 + 3y_1)\vec{k}$$

Karena menurut hipotesanya $\vec{u} \times \vec{y} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ maka kita memiliki $3y_3 - 2y_2 = 1$, $y_3 + 2y_1 = 1$, dan $y_2 + 3y_1 = 1$ yang dapat dituliskan dalam bentuk perkalian matriks menjadi

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Matriks yang diperluas untuk sistem tersebut adalah

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

yang dapat direduksi menjadi bentuk eselon baris tereduksi sebagai berikut.

$$\frac{1}{2}b_1 + b_3 \sim \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \qquad -\frac{3}{2}b_1 + b_3 \sim \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} -\frac{1}{2}b_1 & \sim \\ \frac{1}{2}b_2 & \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad b_1 \leftrightarrow b_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dari matriks terakhir kita peroleh $y_1 + \frac{1}{2}y_3 = \frac{1}{2}$, $y_2 - \frac{3}{2}y_3 = -\frac{1}{2}$ dengan y_3 sebagai variabel bebas. Misalkan $y_3 = t$ maka $y_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t$ dan $y_2 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}t$. Akhirnya kita mendapatkan $\vec{y}$ yang dimaksud yaitu $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t,\ -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}t,\ t\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right) + \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1\right)t$

4. Menentukan semua nilai k supaya $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ membentuk sudut lancip, Jika diketahui $\vec{u} = (k, k-1, 1),\ \vec{v} = (-k-1, 2k, 4)$

Agar $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ membentuk sudut lancip maka haruslah berlaku $\vec{u} \bullet \vec{v} \geq 0$ yaitu

$$(k, k-1, 1) \bullet (-k-1, 2k, 4) \geq 0$$
$$k(-k-1) + (k-1)2k + 4 \geq 0$$
$$-k^2 - k + 2k^2 - 2k + 4 \geq 0$$
$$k^2 - 3k + 4 \geq 0$$
$$\left(k - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geq 0$$

Karena $\left(k - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$ selalu bernilai positif (definit positif) untuk setiap nilai k maka pernyataan terakhir adalah selalu benar untuk sembarang nilai k. Jadi nilai k yang menyebabkan $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ membentuk sudut lancip adalah $k \in \Re$.

5. Menentukan basis dan dimensi ruang solusi (ruang null) dari SPL homogen

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Matriks yang diperluas untuk sistem tersebut adalah

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

yang dapat direduksi menjadi bentuk eselon baris tereduksi sebagai berikut

$$\begin{array}{r} b_3 + b_1 \sim \\ -b_3 + b_2 \end{array} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{r} b_3 + b_1 \sim \\ -b_3 + b_2 \sim \end{array} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r} b_1 \leftrightarrow b_3 \sim \\ \tfrac{1}{4} b_2 \quad \sim \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & \tfrac{1}{4} & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{r} -b_1 + b_2 \sim \\ -4b2 + b_3 \sim \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \tfrac{1}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b_2 + b_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \tfrac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \tfrac{1}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dari matriks ini kita memiliki $x_1 + \frac{1}{4}x_3 = 0$ dan $x_2 + \frac{1}{4}x_3 + x_4 = 0$ dengan x_3 dan x_4 sebagai variabel bebas. Misalkan $x_3 = s$ dan $x_4 = t$ maka $x_1 = -\frac{1}{4}s$ dan $x_2 = -\frac{1}{4}s - t$. Dengan demikian ruang penyelesaian SPL homogen di atas adalah sebagai berikut

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t-s \\ -4t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} s \right\}$$

yang menunjukkan bahwa vektor vektor

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dan } \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

merentang ruang penyelesaian SPL tersebut. Karena $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ tidak saling berkelipatan satu sama lain, maka kedua vektor ini saling bebas linear . Akhirnya kita simpulkan bahwa $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ adalah basis ruang solusi SPL di atas.

PEMBAHASAN
Ujian Tengah Semester Genap 2005/2006
MA1223 Aljabar Linear
KAMIS 6 April 2006

1. Menentukan nilai x_3 jika diketahui SPL dalam bentuk matriks $A\vec{X} = \vec{B}$, dengan $A = \begin{bmatrix} k & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ k & 2k & 3 \end{bmatrix}$ $\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ dan $Det(A) = -1$

   Untuk mempermudah dalam menentukan nilai x_3 terlebih dahulu kita tentukan nilai *k*. Dari $Det(A) = -1$ kita memiliki

   $$5\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ k & 2k \end{vmatrix} + 0 + 3\begin{vmatrix} k & 5 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

   $$5(-2k + k) + 3(-k + 5) = -1$$

   $$-8k + 15 = -1$$

   $$k = 2$$

   Sehingga SPL menjadi

   $$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

   Kemudian dengan menggunakan metode Crammer kita peroleh

   $$x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = -\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -\left(2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^3.5.\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 1.\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}\right)$$

   $$= -(2.(-3) - 5(-1) + (-2)) = -(-6 + 5 - 2) = 3$$

2. Menentukan nilai *k* agar $\left\| proy_{\vec{b}}\vec{a} \right\| = 4$ jika diketahui $\vec{a} = (1, k, 1)$ dan $\vec{b} = (2,2,-1)$.

   $$\left\| proy_{\vec{b}}\vec{a} \right\| = 4$$

   $$\frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\|b\|} = 4$$

$$\frac{(1,k,1)\bullet(2,2,-1)}{\|(2,2,-1)\|}=4$$

$$\frac{2+2k-1}{\sqrt{4+4+1}}=4$$

$$\frac{2k+1}{3}=4$$

$$2k+1=12$$

$$k=\frac{11}{2}$$

3. Memeriksa apakah W subruang R^3 jika diketahui $W=\{(x,y,z)\mid x-z=0\}$

   Akan kita periksa apakah *W* memenuhi sifat sifat dari subruang.

   - Dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa (1,1,1) adalah anggota dari *W* yang menunjukkan *W* memenuhi sifat pertama dari subruang yaitu $W\neq\{\ \}$.
   - Jelas bahwa $W\subset R^3$ yang menunjukkan bahwa memenuhi sifat kedua dari subruang.
   - Misalkan ambil sembarang anggota dari *W* yaitu $w_1,w_2\in W$ dengan $w_1=(a,b,c)$ dan $w_2=(p,q,r)$. Tujuan kita adalah memeriksa apakah $(w_1+w_2)\in W$.

     Karena $w_1,w_2\in W$ maka secara berturut turut haruslah berlaku $a-c=0*$ dan $p-r=0**$.

     Kemudian $w_1+w_2=(a,b,c)+(p,q,r)=(a+p,b+q,c+r)$. Sekarang perhatikan bahwa $(a+p)-(c+r)=(a-c)+(p-r)=0+0=0$ (berdasarkan * dan **) yang menunjukkan bahwa $(w_1+w_2)\in W$ yaitu *W* memenuhi sifat selanjutnya dari subruang.
   - Selanjutnya untuk setiap $k\in\Re$ dan $w_1\in W$ berlaku $kw_1=k(a,b,c)=(ka,kb,kc)$ dan kita ingin memeriksa apakah $kw_1\in W$.

     Karena $ka-kc=k(a-c)=k.0=0$ (berdasarkan*) maka $kw_1\in W$ yang melengkapi pemeriksaan kita bahwa *W adalah subruang dari* R^3.

4. Diketahui $S=\{1-x+x^2, 1+x+x^2\}$
   a. Memeriksa apakah S membangun P_2

      Misalkan $S=\{p_1, p_2\}$ dengan $p_1=1-x+x^2$ dan $p_2=1+x+x^2$. untuk melihat apakah S membangun P_2 maka harus diperiksa apakah **sembarang** polinom $p=a+bx+cx^2$ pada P_2 dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear $p=k_1p_1+k_2p_2$. Atau dengan kata lain akan kita tunjukkan apakah ada k_1 dan k_2 sehingga $p=k_1p_1+k_2p_2 \text{.............}(4.a)$.

      Jika (4.a) kita tuliskan dalam komponennya akan menghasilkan $k_1(1-x+x^2)+k_2(1+x+x^2)=a+bx+cx^2$.

      Dengan mengumpulkan suku suku yang sejenis pada ruas kiri diperoleh

      $(k_1+k_2)+(-k_1+k_2)x+(k_1+k_2)x^2=a+bx+cx^2$

      Dengan membandingkan koefisien suku yang sama pada kedua ruas diperoleh

      $k_1+k_2=a \text{..................}(4.b)$
      $-k_1+k_2=b \text{...............}(4.c)$
      $k_1+k_2=c \text{.................}(4.d)$

      Perhatikan bahwa (4.b) dan (4.d) mengharuskan $a=c$ yang bertentangan dengan pernyataan sembarang polinom $p=a+bx+cx^2$. Artinya tidak ada k_1 dan k_2 untuk sembarang p sehingga $p=k_1p_1+k_2p_2$, yaitu S tidak membangun P_2.

   b. Memeriksa apakah S bebas linear.

      Karena polinom polinom p_1 dan p_2 pada S tidak saling berkelipatan satu sama lain maka *S* bebas linear.

      Alternatif untuk menunjukkan bahwa S bebas linear adalah dengan menunjukkan bahwa $k_1=k_2=0$ merupakan satu satunya solusi dari $k_1p_1+k_2p_2=0$. Penulis tinggalkan kepada pembaca sebagai latihan.

   c. Menentukan apakah S basis P_2 .

      Walaupun S bebas linear, tetapi S tidak merentang P_2 sehingga S bukan basis bagi P_2.

PEMBAHASAN

Ujian Tengah Semester Genap 2004/2005

MA1223 – Aljabar Linear

KAMIS, 14 April 2005

1. Diketahui $A=(1,2,3)$, $B=(-1,2,-3)$, dan $C=(3,2,1)$ merupakan titik pada ruang XYZ.

   a. Menentukan proyeksi vektor $\overrightarrow{AC}$ terhadap vektor $\overrightarrow{AB}$!

   $AC = C - A = (3,2,1)-(1,2,3) = (2,0,-2)$

   $AB = B - A = (-1,2,-3)-(1,2,3) = (-2,0-6)$

   $$proy_{AB}AC = \frac{AC \bullet AB}{\|AB\|^2}\cdot AB = \frac{(2,0,-2)\bullet(-2,0,-6)}{\left(\sqrt{4+0+36}\right)^2}\cdot(-2,0,6)$$

   $$= \frac{-4+12}{40}\cdot(-2,0,6) = \frac{1}{5}(-2,0,6)$$

   b. Menentukan luas segitiga ABC

   $$\text{Luas } \Delta ABC = \frac{1}{2}\|AC\times AB\|$$

   $$AC\times AB = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & -6 \end{vmatrix} = (-1)^3\,\hat{j}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} = -(-12-4)\hat{j} = 16\hat{j}$$

   $$\text{Luas } \Delta ABC = \frac{1}{2}\|16\hat{j}\| = \frac{1}{2}\cdot 16 = 8 \text{ satuan luas}.$$

2. Menentukan $\det\left(3\begin{bmatrix} 2a & 2b & 2c \\ d-a & e-b & f-c \\ g+2a & h+2b & i+2c \end{bmatrix}\right)$ jika jiketahui $\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = t$

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d-a & e-b & f-c \\ g & h & i \end{pmatrix} = t$$

$$\det\begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ d-a & e-b & f-c \\ g & h & i \end{pmatrix} = 2t$$

$$\det\begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ d-a & e-b & f-c \\ g+2a & h+2b & i+2c \end{pmatrix} = 2t$$

$$\det\left(3\begin{bmatrix} 2a & 2b & 2c \\ d-a & e-b & f-c \\ g+2a & h+2b & i+2c \end{bmatrix}\right) = 3^3.2t = 54t$$

3. Menentukan vektor tak nol $\bar{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sehingga $B\bar{u} = 6\bar{u}$ jika $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$. .

$$B\bar{u} - 6\bar{u} = \bar{0}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 6I\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dari matriks ini kita peroleh $5x - 3y = 0$. Karena hanya terdapat sebuah persamaan yang melibatkan dua buah bilangan tidak diketahui maka ada sebuah variabel bebas. Misalkan $y = t$ maka $x = \frac{3}{5}t$. Jadi vektor $\bar{u}$ yang dimaksud adalah $\bar{u} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 1 \end{pmatrix}t$ dengan $t \in \Re$.

4. Menentukan basis subruang $S = \{ax^2 + bx + c \mid a + 2b = 3c\}$

$a + 2b = 3c \quad \Rightarrow \quad a = -2b + 3c$

Karena hanya terdapat sebuah persamaan yang melibatkan 3 buah bilangan yang tidak diketahui, maka ada dua buah variabel bebas. Misalkan $b = s$ dan $c = t$ maka $a = -2s + 3t$. Sehingga kita dapat menuliskan *S* sebagai

$$S = \{(-2s + 3t)x^2 + sx + t\} = \{(x - 2x^2)s + (1 + 3x^2)t\}$$

yang menunjukkan bahwa polinom polinom $p_1 = (x - 2x^2)$ dan $p_2 = 1 + 3x^2$ merentang S. Karena p_1 dan p_2 keduanya tidak saling berkelipatan maka p_1 dan p_2 saling bebas linear. Jadi $\{p_1, p_2\}$ adalah basis bagi S.

Note :

Alternatif lain untuk membuktikan bahwa $\{p_1, p_2\}$ bebas linear adalah melalui prosedur umum yang biasa dilakukan yaitu dengan menunjukkan bahwa $k_1 = k_2 = 0$ merupakan satu satunya penyelesaian dari $k_1 p_1 + k_2 p_2 = 0$.

Jika ditulis dalam bentuk lengkap persamaan terakhir menjadi

$k_1(x - 2x^2) + k_2(1 + 3x^2) = 0$

$k_2 + k_1 x + (-2k_1 + 3k_2)x^2 = 0$

Karena persamaan tersebut harus berlaku untuk setiap nilai *x*, maka haruslah $k_1 = k_2 = 0$ yaitu $\{p_1, p_2\}$ bebas linear.

PEMBAHASAN

Ujian Tengah Semester Ganjil 2003/2004

MA-2313 Aljabar Linear

Selasa 7 Oktober 2003

1. Misalkan sistem persamaan linear $AX = B$, dimana $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   a. Menentukan Determinan A

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & -6 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & -6 & 2 & -1 \\ 3 & -6 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Diperoleh dengan menambahkan baris ke tiga pada baris ke dua.

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Diperoleh dengan mengalikan baris kedua dengan -1 kemudian menambahkannya pada baris pertama.

$$= 0$$

   b. Menentukan A^{-1} bila ada

   Karena $\det(A) = 0$ maka A tidak memiliki invers.

   c. Menentukan basis ruang solusi, jika $B = \overline{0}$

   Misalkan $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ maka SPL menjadi $\begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

   matriks yang diperluas untuk sistem ini adalah

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Yang dapat direduksi menjadi bentuk eselon baris tereduksi sebagai berikut

$$\begin{array}{l} \\ b_3 + b_2 \sim \\ -b_1 + b_4 \sim \\ \end{array} \begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -6 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \\ -b_1 + b_2 \sim \\ 2b_3 + b_4 \sim \\ \end{array} \begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-3b_3 + b_1 \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad b_1 + b_3 \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b_3 \leftrightarrow b_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad -b_3 \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b_2 \leftrightarrow b_3 \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dari matriks ini diperoleh $x_3 - 2x_4 = 0$ dan $x_1 - 2x_2 + x_4 = 0$. Karena hanya terdapat dua persamaan dengan empat buah bilangan tidak diketahui, maka ada dua buah variabel bebas. Misalkan $x_2 = s$ dan $x_4 = t$ maka $x_3 = 2t$ dan $x_1 = 2s - t$ sehingga kita memperoleh ruang penyelesaian SPL sebagai berikut

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2s - t \\ s \\ 2t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} t \right\}$$

yang menunjukkan bahwa vektor vektor $\vec{u}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ dan $\vec{v}=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\\1\end{pmatrix}$

merentang ruang penyelesaian tersebut. Karena $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ keduanya tidak saling berkelipatan, maka $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ saling bebas linear . Jadi $\{\vec{u},\vec{v}\}$ adalah basis ruang solusi dari SPL yang dimaksud.

2. Diketahui sistem persamaan linear $\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&-1&1\\1&5&\alpha&6\\1&0&2&\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\11\\\alpha\end{pmatrix}$

   a. Menentukan nilai α dan β agar SPL memiliki solusi yang banyak. Matriks yang diperluas untuk sistem tersebut adalah

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&2&1&1\\0&1&-1&1&2\\1&5&\alpha&6&11\\1&0&2&\beta&\alpha\end{array}\right)$$

   yang dapat direduksi sebagai berikut

$$\begin{array}{r}\\-b_1+b_4\\-b_1+b_3\\\\\end{array}\begin{pmatrix}1&0&2&1&1\\0&1&-1&1&2\\0&5&\alpha-2&5&10\\0&0&0&\beta-1&\alpha-1\end{pmatrix}\;-5b_2+b_3\sim\begin{pmatrix}1&0&2&1&1\\0&1&-1&1&2\\0&0&\alpha+3&0&0\\0&0&0&\beta-1&\alpha-1\end{pmatrix}^{*}$$

   Ada dua kemungkinan yang menyebabkan sistem ini memiliki solusi banyak yaitu $\alpha=-3$ atau $\alpha=\beta=1$.

   b. Menentukan solusi SPL diatas dari jawaban a

   misalkan kita pilih alternatif kedua pada poin a yaitu $\alpha=\beta=1$, maka operasi terakhir pada poin a (*) akan menjadi

$$\begin{pmatrix}1&0&2&1&1\\0&1&-1&1&2\\0&0&4&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\;\tfrac{1}{4}b_3\sim\begin{pmatrix}1&0&2&1&1\\0&1&-1&1&2\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\;\begin{array}{r}-2b_3+b_1\sim\\b_3+b_2\;\;\sim\end{array}\begin{pmatrix}1&0&0&1&1\\0&1&0&1&2\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Dari matriks terakhir kita memiliki $x_3 = 0$, $x_1 + x_4 = 1$, dan $x_2 + x_4 = 2$. Karena tersisa dua persamaan dengan tiga buah bilangan yang tidak diketahui, maka ada sebuah variabel bebas. Misalkan $x_4 = t$ maka $x_1 = 1 - t$ dan $x_2 = 2 - t$. Sehingga kita mendapatkan penyelesaian SPL yang dimaksud yaitu

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t \\ 2-t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t .$$

3. Diketahui A = (1,-1,2), B = (2,1,-1), dan C = (1,0,-3)
   a. Menentukan luas segitiga ABC !

$$\overline{AC} = C - A = (1,0,-3) - (1,-1,2) = (0,1,-5)$$

$$\overline{AB} = B - A = (2,1,-1) - (1,-1,2) = (1,2,-3)$$

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} + 1.(-1)^3\begin{vmatrix} \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -5 \end{vmatrix} + 0 = -7\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k}$$

$$\text{Luas } \Delta ABC = \frac{1}{2}\left\|\overline{AB} \times \overline{AC}\right\| = \frac{1}{2}\left\|-7\hat{i} + 5\hat{j} + k\right\|$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{49 + 25 + 1} = \frac{\sqrt{75}}{2} = \frac{5}{2}\sqrt{3} .$$

   b. Menentukan proyeksi orthogonal ruas garis AB terhadap ruas garis yang tegak lurus terhadap ruas garis CA dan CB !

$$\overrightarrow{CA} = A - C = (1,-1,2) - (1,0,-3) = (0,-1,5)$$

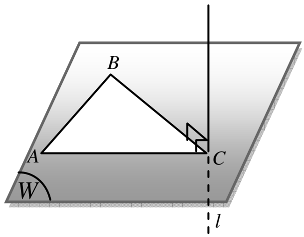
$$\overrightarrow{CB} = B - C = (2,1,-1) - (1,0,-3) = (1,1,2)$$

Misalkan $\vec{v}$ adalah vektor yang tegak lurus terhadap $\overrightarrow{CA}$ dan $\overrightarrow{CB}$ maka

$$\vec{v} = \overrightarrow{CA} \times \overline{CB} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 + \begin{vmatrix} \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -7\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k}$$

$$proy_{\vec{v}}\ \overline{AB} = \frac{\overline{AB} \bullet \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \cdot \vec{v} = \frac{(1,2,-3) \bullet (-7,5,1)}{49 + 25 + 1} \cdot (-7,5,1) = \frac{0}{75} \cdot (-7,5,1) = (0,0,0) .$$

Kita gunakan *alternatif lain* untuk mendapatkan jawaban ini. Perhatikan gambar berikut !.



Misalkan segitiga ABC terletak pada sebuah bidang W dan l adalah garis yang tegak lurus terhadap ruas garis AC dan BC. Karena l tegak lurus AC dan BC maka l tegak lurus dengan bidang W dan karena AB terletak pada bidang W maka l tegak lurus dengan AB. Sehingga haruslah proyeksi garis AB terhadap garis l adalah (0,0,0). (mengapa ???)

4. a. *Memeriksa apakah* $A = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 | a_0 - 2a_2 + a_3 = 0\}$ *merupakan subruang dari* P_3 *!*

Akan kita periksa apakah A memenuhi sifat sifat sebagai subruang.

- Mudah dibuktikan bahwa $1 + x + x^2 + x^3 \in A$ yang menunjukkan bahwa A memenuhi sifat subruang yang pertama yaitu $A \neq \{\ \}$.
- Jelas bahwa $A \subset P_3$ yang menunjukkan A memenuhi sifat subruang yang lain.
- Misalkan ambil sembarang anggota dari A yaitu $p, q \in A$ dengan $p = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3$ dan $q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + q_3 x^3$. Tujuan kita adalah memeriksa apakah $p + q \in A$.

  Karena $p, q \in A$ maka secara berturut turut haruslah berlaku $p_0 - 2p_2 + p_3 = 0*$ dan $q_0 - 2q_2 + q_3 = 0**$. Kemudian

  $$p + q = (p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3) + (q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + q_3 x^3)$$
  $$= (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1)x + (p_2 + q_2)x^2 + (p_3 + q_3)x^3.$$

  Sekarang perhatikan bahwa Berdasarkan * dan **

$(p_0+q_0)-2(p_2+q_2)+(p_3+q_3)=(p_0-2p_2+p_3)+(q_0-2q_2+q_3)=0+0=0$
yang menunjukkan bahwa $p+q\in A$ yaitu A memenuhi sifat subruang yang berikutnya.

- Selanjutnya untuk setiap $k\in\Re$ dan $p\in A$ berlaku $kp=kp_0+kp_1x+kp_2x^2+kp_3x^3$ dan akan kita periksa apakah $kp\in A$. Karena $kp_0-2kp_2+kp_3=k(p_0-2p_2+p_3)=k.0=0$ (berdasarkan *) maka $kp\in A$. yang melengkapi pemeriksaan kita bahwa A adalah subruang dari P_3.

Menentukan basis dan dimensi dari A.

$A=\{a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3 \mid a_0-2a_2+a_3=0\}$

Kondisi $a_0-2a_2+a_3=0$ menunjukkan bahwa a_1 sebagai variabel bebas. Misalkan $a_1=\alpha$. Kemudian karena hanya terdapat sebuah persamaan dan tersisa 3 buah bilangan yang tidak diketahui, maka ada dua buah variabel bebas lagi. Misalkan $a_2=\beta$ dan $a_3=\mu$ maka $a_0=2\beta-\mu$ sehingga kita dapat menuliskan A sebagai $A=\{(2\beta-\mu)+\alpha x+\beta x^2+\mu x^3\}=\{\alpha x+\beta(2+x^2)+\mu(-1+x^3)\}$
yang menunjukkan bahwa polinom polinom $p_1=x$, $p_2=2+x^2$, dan $p_3=-1+x^3$ merentang A.

Selanjutnya untuk melihat apakah p_1, p_2 dan p_3 saling bebas linear akan kita periksa apakah $\alpha=\beta=\mu=0$ merupakan satu satunya solusi dari $\alpha.p_1+\beta.p_2+\mu.p_3=0$.

Jika kita tuliskan dengan lengkap, maka persamaan ini menjadi $\alpha x+\beta(2+x^2)+\mu(-1+x^3)=0$ atau $(2\beta-\mu)+\alpha x+\beta x^2+\mu x^3=0$.
Karena persamaan ini harus berlaku untuk setiap nilai x, maka haruslah $\alpha=\beta=\mu=0$ yaitu p_1, p_2 dan p_3 ketiganya saling bebas linear . Jadi $\{p_1, p_2, p_3\}$ adalah basis bagi A yang berdimensi 3.

Note : jangan bingung dengan simbol α,β, dan μ . Itu sama saja dengan k_1, k_2, k_3 seperti yang pembaca sering gunakan.

b. Memeriksa apakah $W=\left\{w_1=\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\end{pmatrix}, w_2=\begin{pmatrix}0&2\\-1&4\end{pmatrix}, w_3=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}, w_4=\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix}\right\}$. merupakan basis bagi M_{2x2} .

Untuk mengetahui apakah W merupakan suatu basis bagi M_{2x2} , maka harus diperlihatkan apakah W membangun M_{2x2} dan apakah setiap anggota dari W saling bebas linear satu sama lain.

Untuk melihat apakah W membangun M_{2x2} harus kita periksa apakah sembarang matriks $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ pada M_{2x2} dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear $A=k_1w_1+k_2w_2+k_3w_3+k_4w_4$.

Jika kita tuliskan persamaan tersebut dengan lengkap akan menjadi

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0&2\\-1&4\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}+k_4\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix}.$$

Dengan menyederhanakan ruas kanan kemudian membandingkan tiap tiap entri pada kedua ruas akan diperoleh

$$\begin{aligned}2k_1+0k_2+k_3+\ k_4&=a\\ k_1\ +2k_2+k_3+2k_4&=b\\ -k_1\ -k_2-k_3-k_4&=c\\ 0k_1+4k_2+k_3+3k_4&=d\end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix}2&0&1&1\\1&2&1&2\\-1&-1&-1&-1\\0&4&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\\k_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$$

Matriks yang diperluas untuk sistem tersebut adalah

$$\begin{pmatrix}2&0&1&1&a\\1&2&1&2&b\\-1&-1&-1&-1&c\\0&4&1&3&d\end{pmatrix}$$

yang dapat direduksi sebagai berikut

$$\begin{array}{r}b_3+b_1\sim\\b_3+b_2\sim\end{array}\begin{pmatrix}1&-1&0&0&a+c\\0&1&0&1&b+c\\-1&-1&-1&-1&c\\0&4&1&3&d\end{pmatrix}\quad b_1+b_3\sim\begin{pmatrix}1&-1&0&0&a+c\\0&1&0&1&b+c\\0&-2&-1&-1&a+2c\\0&4&1&3&d\end{pmatrix}$$

$$b_3 + b_4 \quad \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & a+c \\ 0 & 1 & 0 & 1 & b+c \\ 0 & -2 & -1 & -1 & a+2c \\ 0 & 2 & 0 & 2 & a+2c+d \end{pmatrix}$$

$$-2b_2 + b_4 \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & a+c \\ 0 & 1 & 0 & 1 & b+c \\ 0 & -2 & -1 & -1 & a+2c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-2b+d \end{pmatrix} .$$

Perhatikan bahwa agar sistem ini memiliki penyelesaian , maka haruslah berlaku $a-2b+d=0$ (baris terakhir). Jika $a \neq 2b-d$ maka sistem ini tidak memiliki penyelesaian yang berarti ada matiks A anggota dari M_{2x2} yang **tidak** dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear $A = k_1 w_1 + k_2 w_2 + k_3 w_3 + k_4 w_4$ dari W. Dengan demikian W tidak membangun M_{2x2} sehingga W bukan basis bagi M_{2x2} .